

Références :

Statistique mathématique, Benoît Cadre

Rappel (Borel Cantelli). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements

(i) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) < \infty$ alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 0$$

ou de manière équivalente

$$\{n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n\} \text{ est fini p.s.}$$

(ii) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) = \infty$ et si les évènements A_n sont indépendants, alors

$$\mathbb{P}(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$$

ou de manière équivalente

$$\{n \in \mathbb{N} : \omega \in A_n\} \text{ est infini p.s.}$$

Théo. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([0, \theta])$ avec $\theta > 0$. On note $\hat{\theta}_n$ l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ . Alors

$$(i) \hat{\theta}_n = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} X_i$$

$$(ii) \hat{\theta}_n \text{ est biaisé car } \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] = \frac{n}{n+1}\theta.$$

$$(iii) \hat{\theta}_n \text{ est fortement consistant ie } \hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}_\theta \text{ p.s.}} \theta$$

$$(iv) \text{ La vitesse de convergence de } \hat{\theta}_n \text{ vers } \theta \text{ est } \frac{1}{n} \text{ car } n(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} -\mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right).$$

(v) Le risque quadratique vaut

$$\mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)}.$$

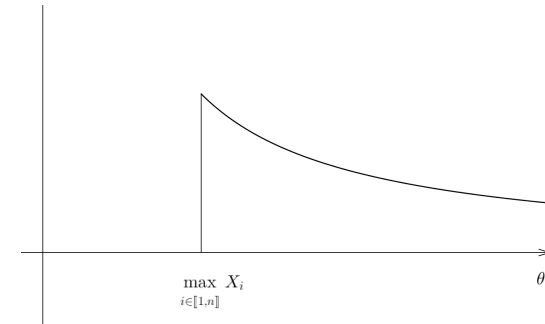
Démonstration. (i) $X_1, \dots, X_n$ variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon la loi $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{U}([0, \theta])$ avec $\theta > 0$, elles admettent donc une densité par rapport à la mesure de Lebesgue qui est, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f_{X_i}(t) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(t).$$

On définit le modèle statistique comme étant $((\mathbb{R}^+)^n, \mathcal{B}((\mathbb{R}^+)^n), (\mathbb{P}_\theta)_{\theta > 0})$.

Ainsi, le modèle admet une vraisemblance qui s'écrit, pour tout $\theta > 0$

$$\begin{aligned} L_n(X_1, \dots, X_n, \theta) &= f_\theta(X_1) \dots f_\theta(X_n) \text{ car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\ &= \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(X_1) \dots \mathbb{1}_{[0, \theta]}(X_n) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{si } \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (X_i) \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$



On a donc

$$\hat{\theta}_n = \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (X_i)$$

(ii) Montrons que $\hat{\theta}_n$ est biaisé.

On calcule la loi de $\hat{\theta}_n$ donc sa fonction de répartition. Comme les X_i

sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, $\hat{\theta}_n$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta}_n}(t) &= \mathbb{P}_\theta(\hat{\theta}_n \leq t) \\ &= \mathbb{P}_\theta\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i \leq t\}\right) \\ &\stackrel{\text{i.i.d}}{=} \mathbb{P}_\theta(X_1 \leq t)^n \\ &= \begin{cases} \left(\frac{t}{\theta}\right)^n & \text{si } t \leq \theta \text{ car } X_i \sim \mathcal{U}([0, \theta]) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto F_{\hat{\theta}_n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ d'où $\hat{\theta}_n$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Ainsi, on a

$$f_{\hat{\theta}_n}(t) = \frac{n}{\theta} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \mathbb{1}_{[0, \theta]}(t).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] &= \int_{\mathbb{R}^+} t f_{\hat{\theta}_n}(t) dt \\ &= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{\theta^{n+1}}{\theta^n} \\ &= \frac{n}{n+1} \theta \end{aligned}$$

(iii) Montrons que $\hat{\theta}_n$ est fortement consistant ie montrons que $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}_\theta \text{ p.s.}} \theta$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon) &= 1 - \mathbb{P}_\theta(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\theta - \varepsilon \leq \hat{\theta}_n \leq \theta + \varepsilon) \\ &= 1 - (F_{\hat{\theta}_n}(\theta + \varepsilon) - F_{\hat{\theta}_n}(\theta - \varepsilon)) \\ &= 1 - \left(1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n\right) \text{ car } \theta + \varepsilon > \theta \\ &= \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \text{ avec } \frac{\theta - \varepsilon}{\theta} < 1 \end{aligned}$$

On a donc le terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1. Ainsi, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon)$ converge.

Par le théorème de Borel-Cantelli, en posant $A_n = \{|\hat{\theta}_n - \theta| \geq \varepsilon\}$, on obtient

$$\mathbb{P}_\theta(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n^c) = 1$$

c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}_\theta \text{ p.s.}, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, |\hat{\theta}_k - \theta| < \varepsilon.$$

En particulier,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists N_p \text{ négligeable}, \forall \omega \in N_p^c, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, |\hat{\theta}_k(\omega) - \theta| < \frac{1}{p}.$$

Considérons maintenant $N = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} N_p$. On a que N est négligeable. On obtient donc que

$$\forall \omega \in N^c, \forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, |\hat{\theta}_k(\omega) - \theta| < \frac{1}{p}$$

c'est-à-dire que

$$\mathbb{P}_\theta \text{ p.s. } (\forall p \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, |\hat{\theta}_k - \theta| < \frac{1}{p}).$$

On a donc bien le résultat.

(iv) Si $\hat{\theta}_n \in [0, \theta]$, alors on a $0 \leq n(\theta - \hat{\theta}_n) \leq n\theta$. Soit $t \in [0, n\theta]$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_\theta(n(\theta - \hat{\theta}_n) \geq t) &= \mathbb{P}_\theta\left(\theta - \frac{t}{n} \geq \hat{\theta}_n\right) \\ &= F_{\hat{\theta}_n}\left(\theta - \frac{t}{n}\right) \\ &= \left(\frac{\theta - \frac{t}{n}}{\theta}\right)^n \\ &= \left(1 - \frac{t}{n\theta}\right)^n \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) \end{aligned}$$

On a donc

$$F_{n(\theta - \hat{\theta}_n)}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - \exp\left(-\frac{t}{\theta}\right) = F_{\mathcal{E}(\frac{1}{\theta})}(t)$$

d'où le résultat.

(v) Le risque quadratique est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] &= \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n^2 - 2\hat{\theta}_n\theta + \theta^2] \\ &= \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n^2] - 2\theta\mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n] + \theta^2 \end{aligned}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[\hat{\theta}_n^2] &= \int_{\mathbb{R}^+} t^2 f_{\hat{\theta}_n}(t) dt \\ &= \int_0^\theta \frac{n}{\theta} \frac{t^{n+1}}{\theta^{n-1}} dt \\ &= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^{n+1} dt \\ &= \frac{n}{\theta^n} \frac{\theta^{n+2}}{n+2} \\ &= \frac{n}{n+2} \theta^2. \end{aligned}$$

En revenant au calcul du risque quadratique, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] &= \frac{n}{n+2} \theta^2 - 2\theta^2 \frac{n}{n+1} + \theta^2 \\ &= \theta^2 \left(\frac{n^2 + n - 2n^2 - 4n + n^2 + 3n + 2}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

□